Revue de Métaphysique et de Morale

EXTRAIT (1979) 84, n° 3

Armand Colin

Mathématique et Réalité [1]

Le langage vernaculaire est plutôt celui de l'affirmation, voire des explications, tandis que le langage algorithmique est celui de la démonstration précise et concise. Chercher à établir la relation entre Mathématique et Réalité, c'est alors tenter de définir des référentiels de correspondance entre le perceptible immédiat et médiat et le construit sur la logique des opérations à partir des symboles postulés attachés primordialement à ce perceptif élaboré en intellectif.

Dans cette lettre dernière, grandiose, accusatrice de toute bêtise, qu'Évariste Galois adressa, le 29 mai 1832, à son ami Auguste Chevalier, on peut lire — et donc on doit s'en pénétrer, c'est-à-dire s'en repénétrer : « Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendantale de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir *a priori* dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense ».

Aujourd'hui les travaux sur les transcendants se sont développés grâce à Cantor, Hermite, Lindemann et quelques autres. Cependant, quand on considère la dimension des traités d'algèbre et la minceur des livres sur les transcendants, on conçoit que les difficultés de conceptualisation sont considérables mais surtout que les approximations *paraissent* suffire, ce qui ne semble pas tellement fondé quand on examine, comme

1. Ce texte est l'expression essentielle de deux conférences prononcées, l'une au Polytechnicum de Zurich (3 juin 1976), l'autre au Palais de la Découverte (27 novembre 1976). Cette dernière conférence était placée sous l'égide de l'« Association Henri Laugier pour un monde plus humain » et dédiée à la mémoire d'Henri Laugier et à celle de René Cassin, qui fut Président d'honneur de l'Association ; le Recteur Jean Roche, Président de l'Association, présentait cette manifestation.

nous allons le faire ici de façon abrégée, la mathématisation de la science — science ou *mathesis*. Nous conviendrons que pousser la décimalisation des « nombres inaccessibles » (comme le disait Borel), c'est payer très cher en néguentropie un travail qui peut paraître ingrat et stérile. Cependant, à la différence des sociétés humaines qui se contentent d'enseigner et de transmettre l'acquis — et qui restent donc dans l'épistémologie d'une *épistémé* quasi stationnaire — les sociétés inventives, industrieuses, scientifiques cherchent évidemment en un premier temps propédeutique à enseigner les éléments nécessaires de l'acquis mais cherchent, ou en viennent, surtout à accroître cet acquis. Il en résulte que cette épistémologie au second degré, expérimentale, est plus exigeante dans ses fondements comme dans ses techniques.

Transcendant, cela signifie ici : qui n'est pas algébrique. Pour les nombres transcendants cela veut dire qu'ils ne sont pas racines d'équations à coefficients rationnels (*cf.* p. 5). Pour les fonctions transcendantales, il s'agit notamment, et notamment seulement, de fonctions qui ne sont jamais définies par des séries finies de termes (*cf.* les fonctions trigonométriques sin x, cos x, etc.). On peut supposer que Galois, s'il avait vécu — je veux dire s'il n'avait pas été assassiné, ou assassiné si tôt, bref s'il avait vécu plus longtemps —, aurait découvert la théorie des nombres transfinis que créa Georg Cantor de 1872 à 1897, ou, au moins, la construction de nombres transcendants $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{10^{n!}}$ (U_n étant quelconque) par Joseph Liouville en 1844, si ce n'est la démonstration de la transcendance de e (base des logarithmes néperiens $= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots =$ 2,7182818284...) par Charles Hermite en 1873 et la découverte, consécutive à la relation d'Euler $e^{\pi i} = -1$ (avec $i = \sqrt{-1}$), de la transcendance de π par Ferdinand Lindemann en 1882...

L'indépendance algébrique est pour beaucoup d'analystes contemporains ce qu'étaient les nombres irrationnels pour les Grecs anciens. Les arithmosophies hébraïque et pythagoricienne privilégient la symbolique relationnelle des entiers, et les ésotérismes numériques modernes poursuivent dans cette voie « confirmée » en quelque sorte par cet aphorisme de Kronecker, principal adversaire de Cantor : « Les nombres entiers ont été faits par le Bon Dieu, tous les autres sont de fabrication humaine ».

Considérons alors le problème théorique qui est directement lié aux limites extrêmes de l'effort scientifique de compréhension et qui montre combien la Science propose plus de problèmes qu'elle n'en résout (1)[2] :

2. Les chiffres entre parenthèses renvoient aux références bibliographiques citées à la fin de l'article p. 326.

la plus grande précision que l'on obtient sur quelque mesure que ce soit est, selon Brillouin (2), information $\rightleftarrows$ (= $\longleftrightarrow$) néguentropie ; cependant si la transformation est irréversible, il y a un déficit et l'entropie S de l'instrument de mesure s'accroît, de sorte que toute information se paie en « liquidités » de néguentropie, le coût minimum d'une observation étant $k \ln 2 \sim 0{,}69314\ldots k \approx 10^{-16}$ (cgs Kelvin) [*cf.* Bell (3)].
De l'équation de Boltzmann (4,5) — d'où découle celle de Shannon (6) — il ressort qu'avec un accroissement permanent d'entropie, pour le maximum de probabilité (certitude d'occurence) $p = 1$ de sorte que $S_{max} = O$, à moins que l'on ne considère que $S_{max} = C$ où C est la constante additive

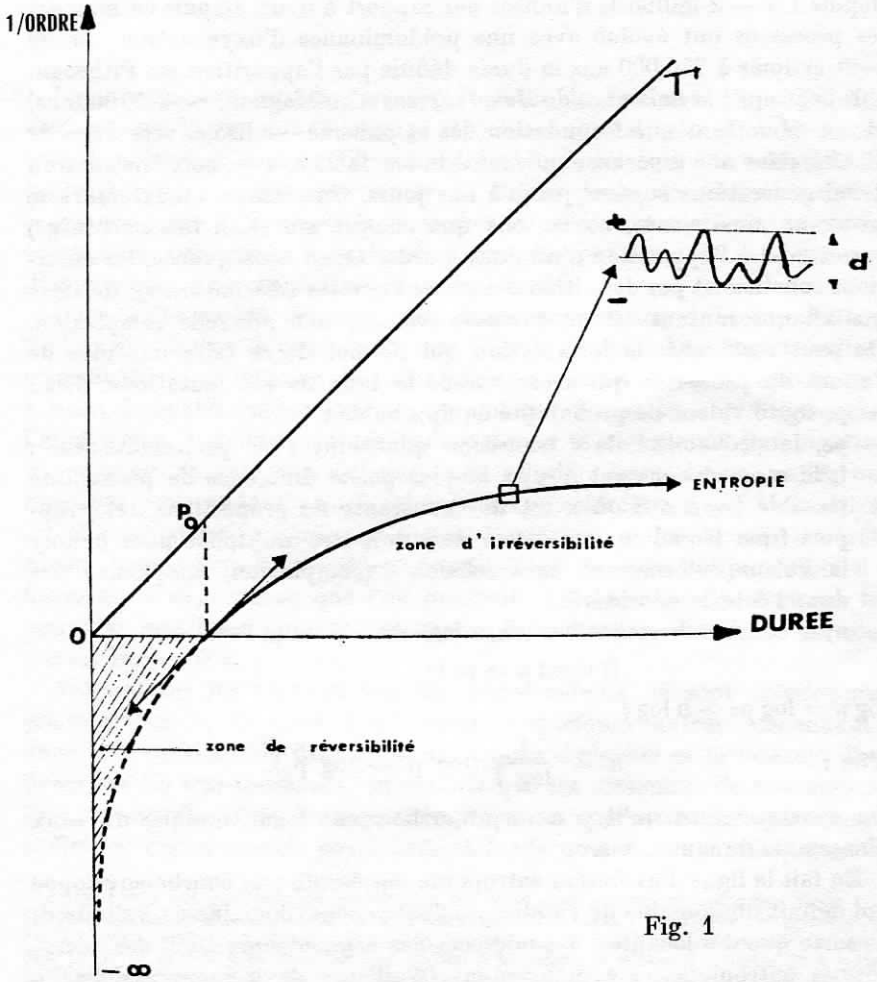


Fig. 1

arbitraire de l'équation $S = k \ln p + C$... Considérons alors une probabilité-seuil (1, 7, 11). La figure 1 montre la courbe que l'on obtient lorsqu'on établit la relation en coordonnées durée / $\frac{1}{\text{ordre}}$ (Γ représente le nombre de micro-états, de complexions au sens de Boltzmann). L'origine de la vie se situe dans la zone de réversibilité sous-liminaire, ce qui revient à dire qu'après tout on peut imaginer un système instable prébiotique-biotique qui, au lieu d'évoluer vers la vie, soit se serait maintenu comme tel, soit aurait évolué vers un monde organique non vivant. Estimons à environ 2 milliards d'années la durée qui sépare la naissance de la Terre de l'apparition des premiers êtres vivants tandis que l'oxygène libre se trouve en quantité importante dans l'atmosphère (notamment par photosynthèse) depuis 1,5 — 2 milliards d'années par rapport à nous. Depuis ce moment les processus ont évolué avec une prédominance d'oxygénation ; or on peut estimer à 750 000 ans la durée définie par l'apparition du Pithécanthrope jusqu'à la naissance de *Homo sapiens* (Cro-Magnon, $\sim$ —40 000 ans) et, en admettant une fécondation dès la puberté — disons vers l'âge de 15 ans, pour une espérance moyenne de vie de 25 ans —, cela fait environ 2 666 générations *sapiens* jusqu'à nos jours. Une échelle « maximum » se trouvant ainsi située, constatons que chaque mutation (au sens large) correspond à l'apparition d'un nouvel ordre et, en conséquence, les mutations constituent par définition des suites discrètes (discontinues), de sorte que chaque mutant est un *quantum évolutif*, une nouvelle complexion. On peut rechercher la formulation qui permet de se faire une idée de l'allure du processus qui a commandé le taux de ces mutations. Soit :

— p, toute valeur de probabilité équiprobable ;
— p_o, la probabilité de « transition quantique » = probabilité-seuil ;
— f, le rapport constant $\Delta p/p$ = plus petite différence de probabilité possible (= $k \Delta S$ où k est une constante de proportionalité) ; rapport f par lequel chaque valeur de p doit être multipliée pour donner la valeur déterminant un « échelon » (complexion) supplémentaire dans l'échelle considérée ;
— n, le nombre de mutations *sensu lato* entre p_o et p.

Il vient $p = p_o f^n$

$\log p = \log p_o + n \log f$

d'où : $$n = \frac{1}{\log f} (\log p - \log p_o).$$

On constate ainsi qu'il y a un amortissement logarithmique du taux d'ensemble de mutations.

En fait la ligne d'évolution entropique représente une courbe-enveloppe qui définit un domaine de validité de fluctuations (domaine de validité d) de sorte que des localités, des microcosmes néguentropiques et des microcosmes entropiques, s'y manifestent (d'ailleurs de grandes régions de

l'Univers sont encore constituées par du plasma, donc il y a des zones « déterminées » et des zones encore « non déterminées »). Disons par ailleurs que ce que nous connaissons de vivant n'est que ce qui a réussi : $x \gg y$ où x représente autant de tentatives et y autant de succès.

Le problème qui se pose à l'investigation théorique et pratique est de concevoir comment se sont établies les corrélations réciproques entre le signal écologique d'oxygénation croissante et le signal génique. Indubitablement, l'Évolution s'est faite par accroissement de l'ADN des gamètes et des séquences nucléotidiques des ADN, de telle sorte que l'information génétique totale s'est trouvée augmentée. Nei (8) a effectué des calculs sur ce point. Si on considère qu'il existe dans l'ADN du Colibacille $3{,}8.10^6$ paires de nucléotides, et que chez un mammifère il y en a $3{,}2.10^9$, alors il y a environ mille fois plus d'ADN chez le mammifère que chez la bactérie. Or *Eobacterium isolatum* a été découvert en 1966 par Barghoorn et Schopf dans des sédiments ayant plus de trois milliards d'années ; il en résulte qu'à ce taux la teneur *moyenne* en ADN augmenterait comparativement pour les mammifères de 7 paires nucléotidiques par an. Il y a donc eu des séries de « polyploïdisation » dans la lignée ancestrale des mammifères, la probabilité qu'une paire nucléotidique reste inchangée pendant trois cent millions d'années (temps depuis lequel les mammifères se sont séparés des oiseaux) est de $e^{-0,12} \sim e^{-0,06}$ ou $0{,}87 \sim 0{,}97$, ce qui indique *un processus de substitution nucléotidique extrêmement lent* (8), d'où une grande stabilité génique qu'accentue l'amortissement logarithmique que je viens d'énoncer [*cf.* néguentropie *in* (1)]. Si un gène comprend environ 1 500 paires nucléotidiques, avec 30 000 loci chez l'Homme, on voit immédiatement qu'il y a un nombre énorme de gènes chez l'Homme et on peut raisonnablement admettre que chez les organismes supérieurs tous ces gènes ne s'expriment pas. En effet, considérant l'Homme et le Chimpanzé — qui ont divergé l'un de l'autre, il y a trente-cinq millions d'années — Nei en arrive à déduire qu'il y aurait entre 97,2 et 99,4 % de paires nucléotidiques *communes* chez l'Homme et le Chimpanzé (l'ADN humain s'hybride d'ailleurs très bien avec l'ADN de Chimpanzé). En somme ceci pose le problème de la *qualité génique* en fonction de l'utilisation d'une fraction infime mais *caractéristique* de notre « information » génétique, ce qui appelle le problème du mécanisme d'occultation.

Quoi qu'il en soit de cela pour l'instant, en approfondissant l'équation entropique, si p correspond à S (état maximal où p et S sont maximaux) et si p_o (probabilité-seuil) correspond à S_o, alors $S_o - S = k \ln (p_o/p)$ ou encore $p_o = p_e^{\frac{S_o - S}{k}}$.

Cette relation introduit e et si $\log_e e = 1$ est une équation rigoureuse, alors il devrait être possible de retrouver 1 en transformant le logarithme naturel en logarithme décimal (module 0,434294481903...) et en effec-

tuant la transformation inverse (module 2,302585092994...)[3]. Or cette opération ne donne pas 1 mais, selon la puissance de la machine ou selon la ténacité de l'homme calculant, on obtient 0,99999999999940(0)... Ceci est la conséquence de l'irrationnalité de e. De sorte que le logarithme naturel de $\log_e e$ n'est pas égal à 0, mais à 0,000000000000599..., ce qui fait que, tenant compte de la valeur de k, S_{max} n'est pas égal à zéro. Alors pour une probabilité de 0 à 1, on obtient cette fois-ci la figure 2.

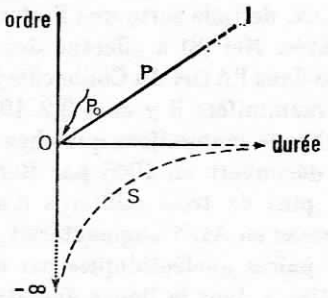


Fig. 2

où l'on note deux asymptotes : l'une vers $-\infty$, l'autre vers 0. C'est entre ces deux indéterminations que nous établissons le monde probabilisable qui est donc très petit par rapport au monde improbabilisable lequel retentit sur le premier.

Examinons maintenant l'espace et la relation géométrico-arithmétique, et jouons d'abord au jeu des définitions ; nous aboutissons à la notion fondamentale de *limite* analytique.

La *droite* dite *numérique*, allant de 0 à 1 par exemple, est un ensemble rectilinéaire possédant une relation de bon ordre et formée de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, où toutes les parties non vides admettent chacune « un plus petit élément », dont un premier élément existe pour tout sous-ensemble. On construit aisément à partir de cette droite l'*espace numérique réel* qui est celui, bien connu, défini par les axes de coordonnées orthogonales passant conjointement par une valeur n (pouvant être nulle et être alors point origine « commun » comme il en va pour les coordonnées classiques d'espace, ce que je discuterai).

Or on sait que les nombres peuvent être distingués entre eux, donc classés, selon un tableau de la forme :

réels
- algébriques
  - rationnels
    - entiers
    - fractionnaires
  - irrationnels algébriques
- irrationnels non-algébriques ou transcendants.

3. Rappelons la formule de changement de base : $\log_a u = \log_a b.\log_b u$. De sorte que $ln\ x =$ Log x = Log 10.log x = 2,3025850929940456840 2... log x et que log x = log e.Log x = 0,43429448190325182765... Log x.

Les transcendants ne sont jamais racines d'équations algébriques. On démontre facilement par élimination de tous les points algébriques en les numérotant et en formant la somme $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$ (somme géométrique décrémentielle) de tous les intervalles de plus en plus réduits du segment unité, que ce segment unité qui est notre droite numérique est quasi entièrement constitué de *transcendants* et de l'ordre de 999999 pour un segment ayant 10^6 comme mesure sans dimension.

Dans la théorie du transfini due à Georg Cantor (*cf.* par exemple 9), on nomme transfini déjà tout ensemble qui a même puissance qu'un de ses sous-ensembles. Est transfini l'ensemble des nombres entiers naturels puisqu'il ne peut s'exprimer par un nombre entier. Cantor assigne la dénomination $\aleph_0$ (lire : aleph-zéro) au *cardinal* ou *puissance* de l'ensemble des entiers naturels. Deux ensembles sont dits avoir même puissance si l'on peut établir entre tous leurs éléments une correspondance bi-univoque. $\aleph_0$ recouvre l'ensemble des dénombrables (un ensemble dénombrable a même puissance que l'ensemble des entiers naturels), tandis que les transcendants ont une puissance supérieure à $\aleph_0$, dite *puissance du continu* $\mathfrak{c}$ ou $\aleph_1$ parce qu'indénombrable.

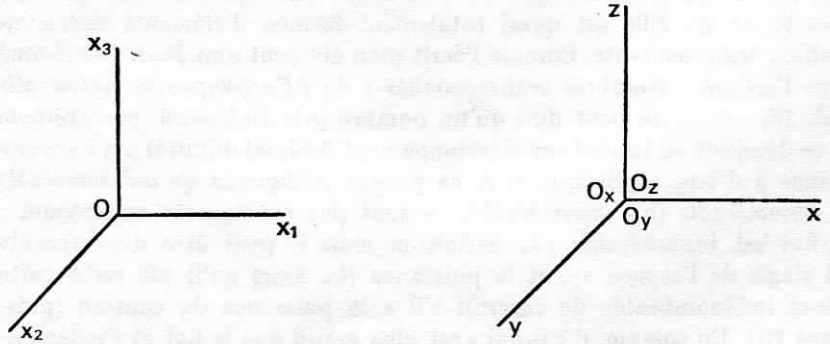
La procédure générative des ordinaux et des cardinaux cantoriens est, en incorporant les entiers naturels (nombres de la première classe) : $1 \prec 2 \prec 3 \ldots \prec n \prec \omega \prec \omega + 1 \ldots \prec \omega + n \ldots \prec \omega.2 \prec \omega.2 + 1 \ldots \prec \omega.2 + n \ldots \prec \omega 3 \ldots \prec \omega n \ldots \prec \omega\omega\ (= \omega^2) \prec \omega^2 + 1 \ldots \prec \omega^2 + n \ldots \prec \omega^2 + \omega \ldots \prec \omega^2 + \omega + 1 \ldots \prec \omega^2 + \omega + n \ldots \prec \omega^2 + \omega.2 \ldots \prec \omega^2 + \omega.n \ldots \prec \omega^2.2 \prec \omega^2.3 \ldots \prec \omega^2.n \ldots \prec \omega^2.\omega\ (= \omega^3) \prec \omega^3 + 1 \prec \omega^3 + 2 \ldots \prec \omega^n \ldots \prec \omega^\omega \ldots \prec \omega^\omega + 1 \ldots \prec \omega^\omega.2 \prec \omega^2.\omega\ (= \omega^3) \prec \omega^3 + 1 \prec \omega^3 + 2 \ldots \prec \omega^n \ldots \prec \omega^\omega \ldots \prec \omega^\omega + 1 \ldots \prec \omega^\omega.2 \ldots \prec \omega^\omega.n \ldots \prec \omega^\omega.\omega \ldots \prec \omega^{\omega^\omega} \ldots$
formant (à partir de ω, le premier nombre entier transfini usuel de puissance $\aleph_1$) l'ensemble bien ordonné des nombres ordinaux de la 2e classe, soit donc par additions, multiplications et exponentiations.

Ainsi la droite numérique de 0 à 1 est telle qu'elle correspond à $\mathbb{R} = \aleph_1 = \mathfrak{c}$. Elle est quasi totalement formée d'éléments indénombrables, transcendants. Comme l'écrit mon éminent ami Jean Dieudonné dans l'article « Nombres transcendants » de l'*Encyclopaedia universalis* (vol. 16) : « ... on peut dire qu'un nombre pris au hasard (par exemple en se donnant au hasard son développement décimal illimité) n'a « aucune chance » d'être algébrique ». A ce propos soulignons qu'*indénombrable* et *innumérable* (ou *innombrable*) ne sont pas strictement synonymes : l'infini est innumérable par définition mais il peut être dénombrable s'il s'agit de l'espace ayant la puissance $\aleph_0$, alors qu'il est resté cette fois-ci indénombrable de surcroît s'il a la puissance du continu (puissance $\aleph_1$). En somme, l' « infini » est plus grand que le fini et l'indénombrable plus grand que le dénombrable.

Par ailleurs l'espace du géomètre est considéré comme homogène et isotrope, disons-le galiléen. C'est effectivement l'intuition, comprise par les Grecs anciens, que l'on peut avoir de l'espace atmosphérique calme, clair, en se déplaçant sur un plan désertique. Einstein lui-même pouvait ainsi écrire : « En observant les systèmes d'étoiles, nous constatons qu'ils sont répartis approximativement avec la même densité dans toutes les directions. Nous sommes ainsi conduits à supposer que l'espace est isotrope, en tout lieu et en tout temps, pour tout observateur qui est au repos relativement à la matière qui l'environne » (10).

Or, d'évidence, l'espace atomique n'est pas homogène ni isotrope (il est d'ailleurs formé de beaucoup plus de vide que de matière et le concept de « continu » y est particulièrement interrogatif) ; en fait ni l'espace cosmique ni l'espace biotique — c'est-à-dire vivant — ne sont homogènes et isotropes et pour eux se pose aussi la notion de « continu ». Dès lors en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles si l'espace était homogène et isotrope, on le figurerait de la façon ci-contre (fig. 3a) et la translation de ce système de référentiels spatiaux ne devrait rien changer à toute représentation rigide que l'on porterait à l'intérieur de ces coordonnées ; il y aurait invariance.

Comme dans les trois grandes questions qui nous occupent — l'univers, l'atome, la vie —, l'*espace est très généralement hétérogène et anisotrope, les phénomènes qui s'y déroulent sont donc plus généralement non-linéaires que linéaires*. Et il faut en conséquence en venir à la représentation que montre la fig. 3b qui, curieusement, est bien celle de nos manuels scolaires à ceci près que nous plaçons ici en toute rigueur trois origines distinctes de valeur zéro puisque chaque droite numérique du trièdre trirectangle est *pseudo*-concourante avec chacune des deux autres au lieu génériquement zéro, clause que l'on admettra en considérant que toute droite numérique est dite *espace séparé* (ou de Hausdorff), c'est-à-dire que pour tout couple de points constitutifs de cette droite il existe un ouvert contenant le premier point de ce couple (un voisinage) et un autre ouvert



a Fig. 3 b

contenant le second point de ce couple, arrangement tel que les voisinages sont disjoints.

Il résulte de cette procédure de pensée que si nous prenons un point quelconque dans l'espace de la pièce où nous nous trouvons, nous pouvons établir les possibilités de coordination référentielles selon le tableau ci-après :

Hypothèse de l'espace galiléen	O_{x_1}	O_{x_2}	O_{x_3}
Hypothèse de l'espace non-galiléen	O_x	O_y	O_z
Distribution des transfinis de projection orthogonale à partir d'un point quelconque de l'espace à trois dimensions	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_1$
	$\aleph_0$	$\aleph_1$	$\aleph_1$
	,	,	,
	,	,	,
	,	,	,
	,	,	,
	$\aleph_1$	$\aleph_1$	$\aleph_1$

Ceci signifie que si chaque droite numérique formant les coordonnées cartésiennes considérées va de 0 à 1, nous nous trouvons dans l'espace probabilisable (0 = absence d'occurence, 1 = occurence certaine) et la plus grande chance, on l'a vu, — étant donné la multitude notée des transcendants — est que le point ait pour coordonnées des indénombrables, de sorte qu'en toute rigueur *l'espace est algébriquement non totalement probabilisable* et ceci pour des raisons *intrinsèques*. C'est bien ce que nous constatons dans tous les domaines du concret. Ceci résulte d'ailleurs du caractère transcendant de nombres *usuels* comme sin 1 (= 0,0174524064...), comme — *bis repetita placent* ! — surtout e (puisque $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$ ou encore $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818284\ldots$) comme π (rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre) = 3,1415926535...) ou encore comme les nombres de Liouville $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{10^{n!}}$, etc. (cf. *supra*). La conclusion par cette voie est déjà que *la connaissance quantitative totale exacte nous est interdite.*

a. On peut démontrer cette conclusion (11) d'une autre façon : la loi qui gouverne la « sortie » de tel nombre dans π existe mais elle nous est inconnue (*cf.* p. 321). De même la procédure générative d'un nombre n'est pas nécessairement explicite ; ainsi pour le nombre 6, il peut provenir soit de $1 + 2 + 3$, soit de $1 \times 2 \times 3$. Et cela n'est pas vrai pour les multiples et sous-multiples de 1, 2 et 3.

b. On peut démontrer cette conclusion par un autre moyen encore que montrent la figure 2 et son commentaire souligné ici : on sait que l'on

peut construire un nombre indéfini quasi illimité (dit infini) de systèmes de logarithmes. D'où une approximation $\log_{tr.} \longrightarrow \log_{alg.}$ qui produit une courbe d'entropie à double asymptote (— ∞ et asymptote 0) comme l'indique la figure 2. Il en résulte que les espaces asymptotiques sont considérablement plus grands que l'espace associé à la logarithmique, de sorte que, répétons-le, l'espace non probabilisable est considérablement plus grand que l'espace que nous cherchons à probabiliser. L'interaction de l'espace non-probabilisable introduit l'imprévu, l'impondérable, l'accident (Madame est descendue une seconde avant ou une seconde après de son escalier, Madame est renversée par un taxi, Madame est tuée : qui peut probabiliser cela ?). C'est ce qui fait aussi que toute planification à long terme est impossible, que la planification à court terme est plausible mais avec une marge de sécurité toujours non négligeable (un bon exemple de la difficulté de prédiction à court terme — disons circadien — est la prévision météorologique locale par suite de l'introduction de paramètres micro-climatiques nombreux et inconnus dans le corps de repères et d'équations dont nous disposons). Autrement dit notre capacité épistémologique rigoureuse est oblitérée, ce qui signifie que nous pouvons approximer une valeur aussi loin que l'on veut sans jamais atteindre la valeur exacte. Cette remarque a deux conséquences :

1° L'approximation aussi grande que l'on veut est en fait plutôt : l'approximation aussi grande que l'on peut ; c'est-à-dire que tout dépend de l'investissement néguentropique que l'on est disposé à consentir et il peut être déraisonnable d'aller à un par-delà de décimalisation puisque *dans la pratique* c'est à l'erreur de mesure près que l'on effectue telle ou telle mesure et, très souvent, les valeurs calculées sont multipliées par un certain coefficient de consolidation (construction d'un pont, etc.) pour se garantir précisément des aléas spatio-temporels d'évolution ;

2° La marge ou tolérance est suffisamment stricte, les consignes étant normalement respectées, dans la pratique (envoi d'une fusée sur des corps du système solaire, conduite des réseaux ferroviaires, etc.) l'infinitude ou plutôt la métafinitude ne jouent pas, encore que la plus haute conscience professionnelle soit nécessaire ; mais dans le domaine de la physique fondamentale (particules, mécanique quantique relativiste) ? Et encore : que sont les forces de gravitation ? Quelle est l'essence d'une charge électrique positive et celle d'une charge électrique négative ?...

Il n'est pas exclu que, d'une part, une conceptualisation mal fondée et que, d'autre part, la multiplicité des paramètres ne contribuent l'une et l'autre à nous voiler la réalité. D'ailleurs seules quelques équations différentielles du premier ordre sont intégrables, et pour un ordre supérieur de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

le domaine de résolution est des plus restreints. De surcroît, quand le

nombre de variables est > 1, c'est aux équations aux dérivées partielles que l'on a recours ; or, on ne sait les résoudre que dans moins de dix cas (les plus connus sont évidemment les équations aux dérivées partielles homogènes, linéaires et à coefficients constants, mais c'est aussi possible pour l'équation de Poisson, celle de Maxwell, celle de type Laplace, celle des cordes vibrantes...).

Si par ailleurs nous établissons les graphiques des 50 premières décimales de π et de $1/\pi$ d'une part, de e et de $1/e$ d'autre part, on aboutit à la figure 4 qui montre des oscillations apériodiques, sauf pour un passage de e en 18281828 situé juste après la première décimale 7. On peut ainsi supposer que dans des séries infinies apériodiques peuvent se trouver de place en place des séries périodiques. Ceci pose l'important problème de la génération des rationalités et des transcendances, de la périodicité et de l'apériodicité dans l'univers, c'est-à-dire de la globalité et de la localité. Ce qui conduit à beaucoup de prudence tant dans les interpolations que dans les extrapolations. Ainsi au moins une séquence de e est périodique donc rationnelle (comme l'est $4/99 = 0{,}0404040404\ldots$), mais l'ensemble forme un *bruit blanc*, c'est-à-dire un développement apériodique apparemment aléatoire, c'est-à-dire présentant des valeurs d'élongation quelconques — et pour l'instant imprévisibles — et dont la transformée de Fourier est une constante pour un nombre métafini de points (à la rigueur ce serait la seule *loi* de composition interne de tels systèmes fluctuants).

Nous en venons ainsi à la notion d'*espace fonctionnel*, celui de toutes les fonctions continues et discontinues, de toutes les courbes. Le cardinal cantorien est $\aleph_2$ (qui n'est pas ordonné, parce que : comment pourrait-on ordonner l'ensemble des fonctions ?). Or nous savons depuis Cantor (9)[4] engendrer $\aleph_{\aleph_1}$ (12), mais au-delà de $\aleph_2$ nous ne savons pas ce que ces cardinaux ($\aleph_3$, $\aleph_4$,...) recouvrent, nous ne les *réalisons* pas. Donc, la Mathématique suivant sa logique propre dépasse la Réalité — ou plus précisément son contenu — tandis que, par ailleurs, elle s'en trouve en deçà comme outil (à moins de considérer que par génération des alephs on parvient à quantifier l'infini ; toutefois comme on ne sait pas ce que signifie « infini », il ne faudrait pas s'abuser sur la signification de cette quantification d'ailleurs illimitée).

Au point où nous en sommes, nous avons vu que pour des raisons *extrinsèques* l'espace physique (atomique, biotique, cosmique) est géné-

4. La procédure générative est comparable à celle qui forme $\aleph_1$ et que nous avons indiquée précédemment : on part d'un ordinal transfini Ω comparable à ω pour les nombres transfinis de la deuxième classe (la première classe étant $\aleph_0$) ; Ω est donc le premier nombre de la troisième classe. Puisque $\aleph_2$ recouvre l'ensemble de toutes les courbes, on s'aperçoit qu'entre les points d'un segment unité et ceux de segments curvilignes on ne peut établir de correspondance biunivoque totale. Il existe donc une puissance supérieure à celle du continu, elle est signifiée par $\aleph_2$ — qui, répétons-le, n'est pas, lui, ordonné : l'ensemble des fonctions continues et discontinues ne présente pas d'ordre de succession.

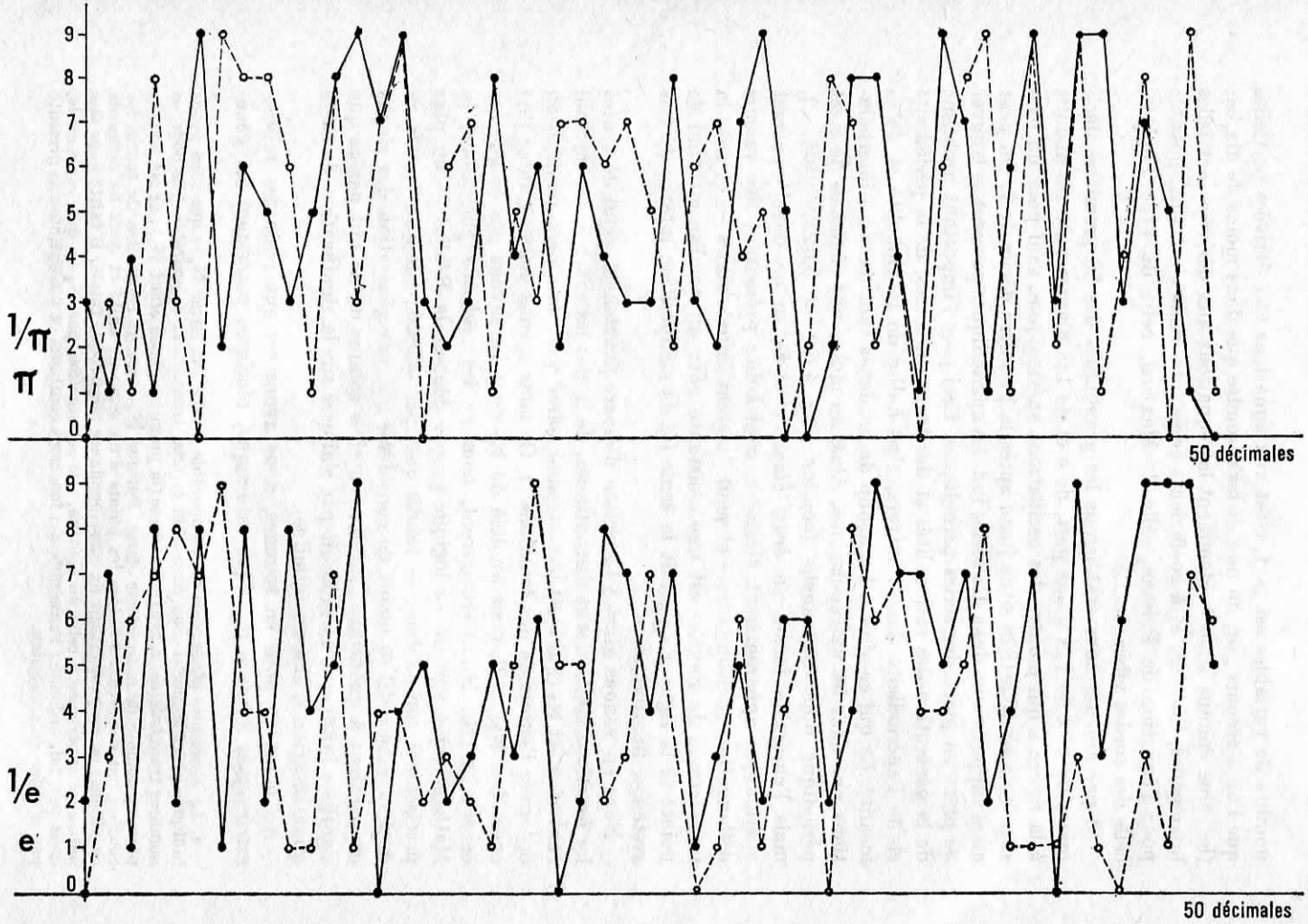


Fig. 4

ralement hétérogène et que, ce qui est plus important, pour des raisons *intrinsèques* (la droite numérique et l'espace $\mathbb{R}^n$ qu'elle engendre), l'espace n'est ni homogène ni isotrope et qu'en conséquence l'espace idéal du géomètre est une idéalité telle que c'est peut-être en cela que réside l'inadéquation, fréquente dans le relatif, constante dans l'absolu, du mathématique au physique.

Pour m'en tenir aux définitions — donc à ce qui est classique dans ce domaine — il est utile de rappeler le résultat cantorien suivant : $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Ce qui revient à dire que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble donné a une puissance supérieure à celle de cet ensemble donné. Précisément $2^{\aleph_0}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\aleph_0$ — ensemble du dénombrable — et on aboutit à $\aleph_1$ — ensemble non dénombrable. Il en va de même pour $\aleph_2$ pour lequel $(2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \mathfrak{c}}$; comme $\aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, $\aleph_2 = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. On pourrait ainsi engendrer, en principe, $\aleph_3 = 2^{\aleph_2}$, $\aleph_4 \ldots \aleph_{\aleph}$. La démonstration pour $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ repose classiquement sur les considérations suivantes : à chaque élément de $\{ 2^{\aleph_0} \}$ — ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable — il correspond une et une seule suite d'une infinité (plutôt dire *métafinité* ?) dénombrable de 0 et de 1, de sorte que $2^{\aleph_0}$ possède la même puissance que l'ensemble T de toutes les suites ainsi engendrées. Soit, en numérotation binaire :

0010111000111110...
et 0100011101001111... soit T

décimalisons, à partir d'un zéro, on obtient :

0,0010111000111110...
et 0,0100011101001111... soit T'

qui sont deux réels distincts, chacun constituant un ensemble correspondant aux éléments de $2^{\aleph_0}$; or l'ensemble des réels possède la puissance du continu, d'où $2^{\aleph_0} = T = T' = \mathfrak{c}$ (ceci est également valable si au lieu d'utiliser la numération binaire on utilisait une numération n-aire : $n^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$). Notons à ce propos que l'équation de Gelfond-Schneider établit que si α, β sont algébriques (avec $\alpha \neq 0,1$ et β irrationnel), α^β est transcendant (*cf.* par exemple *in* : 13).

Montrons en quoi maintenant un bio{S} est un espace *hétérogène et anisotrope* qui naît, croît, meurt par cyclages informationnels. Il suffit de regarder une carte métabolique avec tous ses graphes de cheminement privilégiés que sont les chaînes enzymatiques pour s'assurer des caractéristiques de cet espace qui en fait un *champ tridimensionnel de singularités nonlinéaires*. Une intersection ensembliste équivalant en logique des propositions à ET (l'union à OU), il en résulte par exemple qu'étant donné la procédure mixte écogénétique de formation d'une protéine définie, elle relève effectivement d'un flux logiciel moléculaire, quasi-rigide dans l'instant, du programme génétique centrifuge *et* d'un flux plus complexe et moins ordonné de molécules et de forces centripètes du biotope dans

l'interface qu'est le bio-système considéré, lequel admet dans son circuit intéro-interne d'autres interfaces que sont les ultra-structures. Une application ensembliste dans cet espace hétérogène et anisotrope, contrairement à ce qu'il en est dans l'espace de représentation homogène et isotrope du géomètre, ne donne pas une relation spécifique entre l'objet source et l'objet-cible ; très souvent l'application est surjective (plusieurs points sources) et la cible est bi-équivoque (surtout dans les interconversions métaboliques aux points moléculaires carrefours, donc à multiples origines et efficiences, comme l'acide pyruvique). Ainsi le résultat multi-symplectique des intersections qui constituent *l'organisme lui-même et ses compartiments* (différenciations) *doit être considéré comme une topologie dynamique de singularités* — donc un quadridimensionnel xyzt *affine* puisque t n'a pas même mesure que xyz — où la quasi constance pour un phénotype donné du champ de vecteurs génétiques jointe à la grande variabilité *a contrario* des champs de vecteurs écologiques où est plongé ce bio-système phénotypique fait qu'obligatoirement celui-ci *oscillera*. Ces fluctuations, qui impliquent des rétroactions non seulement négatives — stabilisantes — mais positives — excitatrices — expriment l'*homéostasie* et l'*homéorhésie*.

L'espace atomique et l'espace cosmique ne sont, nous l'avons dit, pas plus homogènes qu'isotropes. Comme de surcroît la Relativité admet dans le riemannien global des zones locales euclidiennes (notre Terre par exemple donc notre Vie) — cf p. 321 —, voire des zones lobatchefskiennes, il en résulte que *la théorie concrète de la mesure ne peut être unitaire* :

— dans l'espace des événements riemanniens (ou « espace elliptique ») : 1. la somme des angles d'un triangle géodésique est $> \widehat{180^o}$ ou π radians (c'est ce que l'on nomme l' « excédent sphérique ») ; 2. π y est plus petit que dans l'euclidien ; 3. le théorème de Pythagore $c^2 = a^2 + b^2$ y est conforme (généralisé il est base de définition, carré de l'élément de distance) ;

— dans l'espace des événements lobatchefskiens (ou « espace hyperbolique ») : 1. la somme des angles d'un triangle est $< \widehat{180^o}$; 2. la valeur de π est supérieure à ce qu'elle est dans l'euclidien ; 3. le théorème de Pythagore s'écrit $\cosh c = \cosh a \cosh b$. Il en résulte que pour des orbites de petit rayon, comme il en va disons dans les atomes la circonférence C d'un cercle de rayon r donné est légèrement plus grande que dans l'euclidien (puisque $= 2\pi \sin hr$ où $\sin hr = r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \ldots$ tel que $\sin hr > r$ donc $C > 2\pi r$) ; mais dans l'espace cosmique les dimensions d'une figure géométrique d'étoiles sont immensément grandes. En dehors du fait que ceci me paraît devoir conduire à réexaminer la nature cosmologique du « red shift », il est intéressant de considérer l'espace euclidien des probabilités $\mathscr{P}_E$ différent de l'espace lobatchefskien des probabilités $\mathscr{P}_L$ et différent encore de l'espace riemannien des probabilités $\mathscr{P}_R$.

Ceci ne change rien à la convention qui postule qu'absence d'occurence correspond à une probabilité nulle et que certitude d'occurence correspond à un maximum d'occurence soit 1. Que l'espace de configuration converge ou diverge, on *normalise* selon une certaine relation où interviendront les valeurs et les rapports des valeurs des probabilités qui changeraient lorsqu'on passerait de déplacements à formulation euclidienne à des déplacements à formulation non-euclidienne (cf. groupes).

Ainsi au terme que je me suis imposé pour cet examen, nous constatons combien il y a à faire : on voit qu'il y a urgence pour la théorie des représentations à développer l'étude des transcendants, des approximations diophantiennes, d'une *Analyse non algébrique*, de $\{tr\} \subset \{\mathbb{R}\}$. Ceci, particulièrement, en y adjoignant la topologie de façon à pouvoir aborder avec plus de rigueur la connaissance du phénomène Vie dont la complexité est si grande que l'on a dit que le XXIe siècle serait le siècle de la Biologie. Or nous sommes déjà au XXIe siècle. N'attendons pas Godot.

Boris Rybak,
Professeur à la Sorbonne nouvelle.

BIBLIOGRAPHIE

1. Rybak, B., *Trans. of N. Y. Acad. Sc.* (1971), *33*, ser. II, nº 4, 371.

2. Brillouin, L., *La Science et la théorie de l'information* ; Masson, Paris (1959).

3. Bell, J.-D., *J. Appl. Physics*, (1952) *23*, 372.

4. Boltzmann, L., *Wiener Ber.* (1877) *76*, 373.

5. Boltzmann, L., *Leçon sur la théorie des gaz*, I et II ; Gauthier-Villars, Paris, tr. fr. (1902).

6. Shannon, L.E., et Weaver, W., The mathematical theory of information ; Un. of Illinois Press, Urbana III (1940).

7. Rybak, B., La Méga-Évolution, *Conf. Palais Découverte* ; A 349, Paris (1969).

8. Nei, M., *Nature* (1969) *221*, 40.

9. Cantor, G., *Contribution to the founding of the theory of transfinite numbers* ; Dover publ. New York (1955, trad. de public. de 1915).

10. Einstein, A., Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité ; Coll. « Discours de la Méthode », Gauthier-Villars, Paris (1972), p. 100.

11. Rybak, B., sur la connaissance totale, *Encyclopædia universalis* vol. *XVII*, *Organum ;* Paris (1973), 25.

12. Cohen, P.J., *Set theory and the continuous hypothesis* ; Benjamin, New York (1966).

13. Lang, S., *Introduction to transcendental numbers* ; Addison-Wesley publ. Cy., Reading (Mass.) (1966).